数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 67-80

MINIMAL K-TYPE WHITTAKER FUNCTIONS OF DISCRETE SERIES OF SOME $\mathbb{R}$-RANK 1 LIE GROUPS

谷口　健二 (Kenji TANIGUCHI)

東京大学数理科学研究科

0. 導入

G を連結半単純 Lie 群、$G=KAN$ をその岩沢分解、$\eta: N \to \mathbb{C}^\times$ を N のユニタリ指標とする。

$$C^\infty(G/N;\eta) := \left\{\phi : G \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{C} \ ; \ \phi(gn)=\eta(n)^{-1}\phi(g) \quad (g\in G, n\in N)\right\}$$

という関数空間は左移動により G の表現空間となる。(π,W) を G の表現としたとき、(π,W) の $C^\infty(G/N;\eta)$ における実現を (π,W) の Whittaker model という。

Whittaker model を決定することは、(π,W) から $C^\infty(G/N;\eta)$ への intertwining operator ι を決定することと同値である。

今回の講演では G が $Sp(1,1), SU(3,1), SU(4,1)$ で、(π,W) がそれらの離散系列表現であるときに、具体的な計算を通じて W の minimal K-type ベクトルの ι による像（minimal K-type Whittaker 関数と呼ぶ）の explicit な表示を求めたことについて話した。ここでは G が $Sp(1,1)$ と $SU(n,1)$ の場合の離散系列表現の minimal K-type Whittaker 関数の explicit な表示について述べさせて頂くことにする。

1. 記号

まず本稿で使う記号をまとめて記述しておく。

G : 連結半単純 Lie 群、中心有限で離散系列表現を持つものとする。

$\mathfrak{g}$: G の Lie 環。$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$: $\mathfrak{g}$ の複素化。$\mathfrak{g}^*$: $\mathfrak{g}$ の双対空間。以下、他の群などについても同様の記法を用いる。

$B(\ ,\ )$: $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の Killing 形式。

$G=KAN, \mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$: 岩沢分解。$M=Z_K(\mathfrak{a})$ 。

θ : $\mathfrak{g}$ の Cartan involution 。$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上に複素共役線形に拡張しておく。

$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$: 対応する Cartan 分解。

$\mathfrak{t}\subset\mathfrak{k}$: コンパクト Cartan 部分環。

$\Delta=\Sigma(\mathfrak{t}_\mathbb{C},\mathfrak{g}_\mathbb{C})$: ルートの集合。

$\mathfrak{g}_\mathbb{C}^\alpha$: $\alpha\in\Delta$ に対応するルート空間。

$\Delta_c=\{\alpha\in\Delta \ ; \ \mathfrak{g}_\mathbb{C}^\alpha\subset\mathfrak{k}_\mathbb{C}\}$: コンパクトルートの集合。

$\Delta_n = \Delta - \Delta_c$: ノンコンパクトルートの集合。

$\Delta_c^+ \subset \Delta^+$: それぞれ Δ_c, Δ の positive systems 。

$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$, $\rho_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_c^+} \alpha$

$(\, , \,)$: Killing 形式より定まる $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 上の内積。

$< \, , \, >$: ベクトル空間とその双対空間との coupling 。

E_{ij} : (i,j)-成分が 1 で他の成分は 0 である正方行列。

2. Whittaker model の実現方法

まず離散系列表現の基礎知識の復習をしておく。

$\Lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ で

(1) $(\Lambda, \alpha) \neq 0$ for any $\alpha \in \Delta$

(2) $\Lambda + \rho$ は K-integral

を満たすものの集合を Ξ_c で表すと、Δ_c の Weyl 群を W_c としてΞ_c/W_c によって G の離散系列表現は parametrize される。これを G の離散系列表現の Hairish-Chandra パラメーターといい、対応する離散系列表現を π_Λ で表す。別の言い方をすれば、Δ_i^+ $(i = 1, \ldots, l)$ をΔ_c^+ を含む Δ の positive systems として

$$\Xi_i = \{\Lambda \in \Xi_c; \ (\Lambda, \alpha) > 0 \ \text{for any} \ \alpha \in \Delta_i^+\}$$

と置いたとき、Ξ_c 上の 1 つの W_c-orbit の中で K-dominant なものを代表元としてとると、$\Xi_c/W_c = \bigcup_{i=1}^{l} \Xi_i$ であるので、$\bigcup_{i=1}^{l} \Xi_i$ が G の離散系列表現の Harish-Chandra パラメーターの集合となっている。

このとき $\Lambda \in \Xi_i$ に対して

$$\lambda = \Lambda + \rho_i - 2\rho_c$$

$\left(但し \ \rho_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_i^+} \alpha \right)$ とすると、λ は π_Λ の minimal K-type の highest weight になっている。この λ を π_Λ の Blattner パラメーターという。

η を N のユニタリ指標としたとき、一般に K の有限次元連続表現 (τ, V) に対して

$$\begin{aligned} &C_\tau^\infty(K \backslash G/N; \eta) \\ &\quad = \left\{ f : G \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{C}; f(kgn) = \eta(n)^{-1}\tau(k)f(g) \ (k \in K, g \in G, n \in N) \right\} \end{aligned}$$

という関数空間を考える。

K の $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 上の随伴作用は K の表現となるので、これを $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ と表す。$\{X_i\}$ を $\mathfrak{p}$ の Killing 形式についての正規直交基底として、

$$\nabla_{\tau,\eta}\phi(g) = \sum_i L_{X_i}\phi(g) \otimes X_i \quad (\phi \in C_\tau^\infty(K \backslash G/N; \eta))$$

（但し $L_{X_i}\phi(g)=\frac{d}{dt}\phi(\exp(-tX_i)g)|_{t=0}$ $(g\in G)$ ）という微分作用素を考えると、これは $C^\infty_\tau(K\backslash G/N;\eta)$ から $C^\infty_{\tau\otimes\mathrm{Ad}}(K\backslash G/N;\eta)$ への写像で、左からの K の作用と可換なものになっている。

(τ_μ,V_μ) で highest weight が μ である K の既約有限次元表現を表す。λ を G の離散系列表現の Blattner パラメーターで $\Lambda\in\Xi_i$ に対応するものとすると、

$$(\tau_\lambda,V_\lambda)\otimes(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_\mathbb{C})\simeq(\tau^+_\lambda,V^+_\lambda)\oplus(\tau^-_\lambda,V^-_\lambda)$$

という分解が得られる。但し

$$(\tau^\pm_\lambda,V^\pm_\lambda)=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+_{i,n}}m(\alpha)(\tau_{\lambda\pm\alpha},V_{\lambda\pm\alpha})\quad(m(\alpha)=0,1)$$

とした。

この分解に即して

$$P:(\tau_\lambda,V_\lambda)\otimes(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_\mathbb{C})\longrightarrow(\tau^-_\lambda,V^-_\lambda)$$

という $(\tau^-_\lambda,V^-_\lambda)$ への projection operator P を定め、

$$\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}=P\circ\nabla_{\tau_\lambda,\eta}:C^\infty_{\tau_\lambda}(K\backslash G/N;\eta)\longrightarrow C^\infty_{\tau^-_\lambda}(K\backslash G/N;\eta)$$

で作用素 $\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ を定義する。

<u>**定理** ([Y1, Theorem 2.4])</u>

π^*_Λ で π_Λ の反傾表現を表す。λ が「壁から遠い」とき、つまり任意の $Q\subset\Delta^+_{i,n}$ に対して $\lambda-\sum_{\beta\in Q}\beta$ が Δ^+_c-dominant であるとき、

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(\pi^*_\Lambda,C^\infty(G/N;\eta))\simeq\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$$

という同型が存在する。

更にこの対応

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(\pi^*_\Lambda,C^\infty(G/N;\eta))\ni\iota\Longleftrightarrow F^\iota\in\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$$

は π^*_Λ の a minimal K-type vector v^* に対して

$$\iota(v^*)(g)=<v^*,F^\iota(g)>\quad(g\in G)$$

で与えられる。

この方法を用いて、$G=Sp(1,1)$ と $G=SU(n,1)$ の minimal K-type Whittaker 関数を求める。

以下 $\mathbb{R}$-rank 1 の群を扱うので、この場合の計算が少し簡素化されることを説明しておく。

G が $\mathbb{R}$-rank 1 の群の時、$\mathfrak{a}^*$ の基底として適当な $f \in \mathfrak{a}^*$ を定めておくと、$\Sigma^+ = \Sigma^+(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{f\}$ または $\{f, 2f\}$ と表される。$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ には

$$(X, Y) = -B(X, \theta Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$$

により内積が入る。これにより $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$ を同一視する。また N のユニタリ指標の集合 $\hat{N}$ と $\sqrt{-1}\mathfrak{g}_f^*$ は

$$\eta(\exp X) = \exp(< \sqrt{-1}\xi, X >) \quad (X \in \mathfrak{n},\ \eta \in \hat{N},\ \xi \in \mathfrak{g}_f^*)$$

により同一視されるので、この同一視により $\hat{N}$ に内積 (,) を入れることができる。M の $\hat{N}$ への作用 $\eta \mapsto \eta^m$ $(m \in M)$ を$\eta^m(n) = \eta(m^{-1}nm)$ $(n \in N)$ で定義すると、

補題

$\mathbb{R}$-rank $G = 1$ で G は $SL(2, \mathbb{R})$ と同型ではないとき、 M は $S(\hat{N}) = \{\eta \in \hat{N}; (\eta, \eta) = 1\}$ に推移的に作用する。

これより次が得られる。

系

(1) 任意の $\eta_1, \eta_2 \in S(\hat{N})$ に対して$\eta_1^m = \eta_2$ を満たす $m \in M$ が存在する。

(2)
$$C^\infty(G/N; \eta) \ni \phi(x) \mapsto \phi^m(x) = \phi(xm) \in C^\infty(G/N; \eta^m)$$
は任意の $m \in M$ に対して G-modules の同型である。

(3)
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N; \eta)) &\simeq \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta} \ni \phi(x) \\ &\mapsto \phi^m(x) = \phi(xm) \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta^m} \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N; \eta^m))\end{aligned}$$
は同型である。

よって $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$ を求めるには「計算し易い」 η の場合について計算すれば十分であることが分かる。

3. $G = Sp(1,1)$ の場合

まず $Sp(1,1)$ と $\mathfrak{sp}(1,1)$ の構造について復習する。

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix},\ K_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ として、}$$

$$G = Sp(1,1) = \{g \in SL(4, \mathbb{C}) \ ; \ {}^t g J_2 g = J_2,\ {}^t g K_{11} \bar{g} = K_{11}\}$$

で $Sp(1,1)$ は定義される。するとそのリー環と極大コンパクト部分群は

$$\mathfrak{sp}(1,1) = \{X \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C}); {}^t X J_2 + J_2 X = 0, {}^t X K_{11} + K_{11}\bar{X} = 0\}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ -\bar{b}_1 & 0 & \bar{a}_1 & 0 \\ 0 & -\bar{b}_2 & 0 & \bar{a}_2 \end{pmatrix} ; a_i, b_i \in \mathbb{C}, |a_i|^2 + |b_i|^2 = 1 \right\}$$

$$\simeq SU(2) \times SU(2) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -\bar{b}_1 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -\bar{b}_2 & \bar{a}_2 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

で表される。以下 K と $SU(2)\times SU(2)$ とを同一視する。

コンパクト Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ を

$$\mathfrak{t}=\{\sqrt{-1}\mathrm{diag}(x,y,-x,-y)\ ;\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

とし、$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ の基底を $T_1=E_{11}-E_{33}$, $T_2=E_{22}-E_{44}$ で、$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ の基底 $\{e_1,e_2\}$ を $e_i(T_j)=\delta_{ij}$ でそれぞれ定義すると

$$\begin{aligned}\Delta&=\{\pm2e_1,\pm2e_2,\pm e_1\pm e_2\}\\ \Delta_c&=\{\pm2e_1,\pm2e_2\}\end{aligned}$$

となる。$\Delta_c^+=\{2e_1,2e_2\}$ とすると、これを含む Δ の positive systems は

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\{2e_1,2e_2,e_1+e_2,e_1-e_2\}\\ \Delta_2&=\{2e_1,2e_2,e_1+e_2,e_2-e_1\}\end{aligned}$$

の2つがあるので、

$$\begin{aligned}\Xi_1&=\{\Lambda=\Lambda_1e_1+\Lambda_2e_2;\ \Lambda_1>\Lambda_2>0,\Lambda_i\in\mathbb{Z}\}\\ \Xi_2&=\{\Lambda=\Lambda_1e_1+\Lambda_2e_2;\ \Lambda_2>\Lambda_1>0,\Lambda_i\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

とおくと、$\Xi_1\cup\Xi_2$ が Harish-Chandra パラメーターの集合となり、

$$\begin{aligned}\lambda&=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2=\Lambda-e_2\quad(\Lambda\in\Xi_1)\\ \lambda&=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2=\Lambda-e_1\quad(\Lambda\in\Xi_2)\end{aligned}$$

が対応する Blattner パラメーターである。

一方 $\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix}0&z&0&w\\ \bar{z}&0&w&0\\ 0&\bar{w}&0&-\bar{z}\\ \bar{w}&0&-\bar{z}&0\end{pmatrix};z,w\in\mathbb{C}\right\}$ であるので、

$$(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})\simeq(\tau_{e_1+e_2},V_{e_1+e_2})$$

となり、$\lambda=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$ に対して

$$\begin{aligned}&(\tau_\lambda,V_\lambda)\otimes(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})\\ &\qquad\simeq(\tau_{\lambda+e_1+e_2},V_{\lambda+e_1+e_2})\bigoplus(\tau_{\lambda-e_1+e_2},V_{\lambda-e_1+e_2})\\ &\qquad\qquad\bigoplus(\tau_{\lambda+e_1-e_2},V_{\lambda+e_1-e_2})\bigoplus(\tau_{\lambda-e_1-e_2},V_{\lambda-e_1-e_2})\end{aligned}$$

が成り立つ。また $\mathfrak{p}$ の正規直交基底として

$$\begin{aligned}&\frac{E_{12}-E_{43}+E_{21}-E_{34}}{2\sqrt{6}},\quad\sqrt{-1}\frac{E_{12}-E_{43}-E_{21}+E_{34}}{2\sqrt{6}},\\ &\frac{E_{14}+E_{23}+E_{32}+E_{41}}{2\sqrt{6}},\quad\sqrt{-1}\frac{E_{14}+E_{23}-E_{32}-E_{41}}{2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

が取れるので、 $\nabla_{\tau_\lambda,\eta}$ の計算にはこれを用いることにする。

$H = E_{14} + E_{23} + E_{32} + E_{41}$ とすると、$\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間になり、対応するルート系は $\Sigma(\mathfrak{a},\mathfrak{g}) = \{\pm 2f\}$ である。但し $f \in \mathfrak{a}^*$ を $f(H) = 1$ で定めた。$\Sigma^+(\mathfrak{a},\mathfrak{g}) = \{2f\}$ とすると $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{2f}$ の基底を $Y_1 = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & -1 & \\ & 1 & -1 & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix}$,

$Y_2 = \begin{pmatrix} & 1 & -1 & \\ 1 & & & -1 \\ 1 & & & -1 \\ & 1 & -1 & \end{pmatrix}$, $Y_3 = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} & 1 & -1 & \\ -1 & & & 1 \\ -1 & & & 1 \\ & 1 & -1 & \end{pmatrix}$ と取ることができ、「計算しやすい」 $\eta \in \hat{N}$ として

$$(*) \qquad \eta(\exp(x_1Y_1 + x_2Y_2 + x_3Y_3)) = e^{\sqrt{-1}x_1\xi} \quad (x_i \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}_{>0})$$

を採用する。更に

$$\mathbb{R}_{>0} \ni a \mapsto \exp((\log a)H) \in A$$

で A に座標系をいれる。よく知られているように、highest weight が $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である $SU(2)$ （または $SL(2,\mathbb{C})$ ）の既約有限次元表現の基底として $\{v_k^m\}_{0\leq k\leq m}$ で

$$\begin{aligned} hv_k^m &= (2k-m)v_k^m \\ xv_k^m &= (m-k)v_{k+1}^m \\ \bar{x}v_k^m &= kv_{k-1}^m \end{aligned}$$

を満たすものが取れる。但し $h, x, \bar{x}$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底で

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とした。

$K \simeq SU(2) \times SU(2)$ だから、highest weight が $\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ である K の既約有限次元表現の基底として $\{v_k^{\lambda_1} \boxtimes v_l^{\lambda_2}\}_{\substack{0\leq k\leq\lambda_1,\\ 0\leq l\leq\lambda_2}}$ が取れる。これを利用して $\phi \in C^\infty_{\tau_\lambda}(K\backslash G/N;\eta)$ を

$$\phi(g) = \sum_{k=0}^{\lambda_1}\sum_{l=0}^{\lambda_2} c_{kl}(g) v_k^{\lambda_1} \boxtimes v_l^{\lambda_2}$$

と表す。この係数関数 $c_{kl}(g)$ を explicit に求めるのが本節の目的である。

ϕ は左からの K の作用と右からの N の作用が決まっているので、$G = KAN$ より A への制限で完全に決まる。ゆえに $\phi \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ を求めるには、$\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ の A-radial part を $R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta})$ として、 $\phi|_A \in \mathrm{Ker}R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta})$ を求めれば十分である。

以上の準備のもとで $R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta})\phi(a) = 0$ は次のように表される。

命題

(1) $\Lambda \in \Xi_1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ker} R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta})\phi(a) = 0 \\
&\quad \Longleftrightarrow (\lambda_1 - k)\left(a\frac{d}{da} - \frac{\xi}{a^2} + 2 - 2l + \lambda_1 + \lambda_2\right) c_{kl}(a) \\
&\qquad\qquad - 2(k+1)(l+1)c_{k+1,l+1}(a) = 0 \\
&\qquad (k+1)\left(a\frac{d}{da} + \frac{\xi}{a^2} + 2 + 2l + \lambda_1 - \lambda_2\right) c_{k+1,l}(a) \\
&\qquad\qquad - 2(\lambda_1 - k)(\lambda_2 + 1 - l)c_{k,l-1}(a) = 0 \\
&\qquad\qquad (0 \le k \le \lambda_1 - 1, 0 \le l \le \lambda_2)
\end{aligned}
$$

但し $c_{k,\lambda_2+1}(a) = c_{k,-1}(a) = 0$ とした。

(2) $\Lambda \in \Xi_2$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ker} R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta})\phi(a) = 0 \\
&\quad \Longleftrightarrow (\lambda_2 - l)\left(a\frac{d}{da} - \frac{\xi}{a^2} + 2 - 2k + \lambda_1 + \lambda_2\right) c_{kl}(a) \\
&\qquad\qquad - 2(k+1)(l+1)c_{k+1,l+1}(a) = 0 \\
&\qquad (l+1)\left(a\frac{d}{da} + \frac{\xi}{a^2} + 2 + 2k + \lambda_2 - \lambda_1\right) c_{k,l+1}(a) \\
&\qquad\qquad - 2(\lambda_1 - k + 1)(\lambda_2 - l)c_{k-1,l}(a) = 0 \\
&\qquad\qquad (0 \le k \le \lambda_1, 0 \le l \le \lambda_2 - 1)
\end{aligned}
$$

但し $c_{\lambda_1+1,l}(a) = c_{-1,l}(a) = 0$ とした。

この方程式系を解くと次の結果を得る。

定理 1

(1) N の任意の非退化指標 ζ と $\Lambda \in \Xi_1$ に対し、

$$
\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N;\zeta)) = 2(\lambda_2+1) = 2\Lambda_2
$$

(2) N の指標 η を $(*)$ のように定めると、$\phi(g) = \sum_{k=0}^{\lambda_1}\sum_{l=0}^{\lambda_2} c_{kl}(g) v_k^{\lambda_1} \boxtimes v_l^{\lambda_2}$ は $c_{k0}(a)$ $(\lambda_1 - \lambda_2 \le k \le \lambda_1)$ と $c_{k\lambda_2}(a)$ $(0 \le k \le \lambda_2)$ で完全に決定される。

(3) (2) と同じ条件の下で、

$$
\begin{aligned}
c_{k0}(a) &= c_1 a^{\lambda_2 - \lambda_1 - 2} e^{-\frac{\xi}{2a^2}} \quad (\lambda_1 - \lambda_2 \le k \le \lambda_1) \\
c_{k\lambda_2}(a) &= c_1 a^{\lambda_2 - \lambda_1 - 2} e^{\frac{\xi}{2a^2}} \quad (0 \le k \le \lambda_2)
\end{aligned}
$$

と表される。但し c_1, c_2 は任意定数。

<u>証明のスケッチ</u>

先ず前の命題の式より $c_{k,\lambda_2}(a)$ $(0 \leq k \leq \lambda_1 - 1)$ と $c_{k,0}(a)$ $(1 \leq k \leq \lambda_1)$ はすぐに計算できる。次に、命題の式は $c_{k,l}(a)$ から $c_{k+1,l+1}(a)$ を、または逆に $c_{k+1,l+1}(a)$ から $c_{k,l}(a)$ をそれぞれ与える式であるから、この $c_{k,\lambda_2}(a)$ と $c_{k,0}(a)$ を用いれば全ての $c_{k,l}(a)$ を決定することができる。ところがこのようにして $c_{k,l}(a)$ を決めていくとき、$c_{k,0}(a)$ $(0 \leq k \leq \lambda_1 - \lambda_2 - 1)$ から決まる $c_{k+\lambda_2,\lambda_2}(a)$ は $c_{k+\lambda_2,\lambda_2}(a)$ 自身が満たすべき式を満たさないので、結局 $c_{k,0}(a) = 0$ $(0 \leq k \leq \lambda_1 - \lambda_2 - 1)$ であることがわかる。以上により定理が示される。

同様にして $\Lambda \in \Xi_2$ に対しても次の結果が得られる。

<u>定理 2</u>

(1) N の任意の非退化指標 ζ と $\Lambda \in \Xi_2$ に対し、

$$\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N;\zeta)) = 2(\lambda_1 + 1) = 2\Lambda_1$$

(2) N の指標 η を $(*)$ のように定めると、$\phi(g) = \sum_{k=0}^{\lambda_1}\sum_{l=0}^{\lambda_2} c_{kl}(g) v_k^{\lambda_1} \boxtimes v_l^{\lambda_2}$ は $c_{0l}(a)$ $(\lambda_2 - \lambda_1 \leq k \leq \lambda_2)$ と $c_{\lambda_1,l}(a)$ $(0 \leq l \leq \lambda_1)$ で完全に決定される。

(3) (2) と同じ条件の下で、

$$c_{0l}(a) = c_1 a^{\lambda_1 - \lambda_2 - 2} e^{-\frac{\xi}{2a^2}} \quad (\lambda_2 - \lambda_1 \leq l \leq \lambda_2)$$
$$c_{\lambda_1,l}(a) = c_1 a^{\lambda_1 - \lambda_2 - 2} e^{\frac{\xi}{2a^2}} \quad (0 \leq l \leq \lambda_1)$$

と表される。但し c_1, c_2 は任意定数。

4. $G = SU(n,1)$ の場合

$Sp(1,1)$ のときと同様に、まず $SU(n,1)$ の構造を復習する。

$I_{n,1} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ として

$$G = SU(n,1) = \left\{ g \in SL(n+1,\mathbb{C}); {}^t\bar{g} I_{n,1} g = I_{n,1} \right\}$$

で $SU(n,1)$ は定義される。このとき $\mathfrak{g}$ と K は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n,1) = \{X \in \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}) \ ; \ {}^t\bar{X} I_{n,1} + I_{n,1} X = 0\}$$
$$K = G \cap U(n+1) = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & (\det k)^{-1} \end{pmatrix} \ ; \ k \in U(n) \right\} \simeq U(n)$$

で表される。以下 K と $U(n)$ を同一視する。

$\mathfrak{g}$ のコンパクト Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ を

$$\mathfrak{t} = \left\{ \sqrt{-1}\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \ ; \ a_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0 \right\}$$

で定める。e_i を

$$e_i(\sqrt{-1}\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_{n+1}))=\sqrt{-1}a_i$$

で定義すると、

$$\Delta=\{e_i-e_j;\ 1\le i\ne j\le n+1\}$$
$$\Delta_c=\{e_i-e_j;\ 1\le i\ne j\le n\}$$

であるので、

$$\Delta_c^+=\{e_i-e_j;\ 1\le i<j\le n\}$$

とすると、これを含む Δ の positive systems は $n+1$ 個あって、それらをその simple roots で表すと

$$\begin{aligned}
\Delta_1^+ &\Longleftrightarrow \Pi_1=\{e_{n+1}-e_1,e_1-e_2\ldots,e_{n-1}-e_n\}\\
\Delta_2^+ &\Longleftrightarrow \Pi_2=\{e_1-e_{n+1},e_{n+1}-e_2,\ldots,e_{n-1}-e_n\}\\
&\cdots\\
\Delta_k^+ &\Longleftrightarrow \Pi_k=\{e_1-e_2,\ldots,e_{k-1}-e_{n+1},e_{n+1}-e_k,\ldots,e_{n-1}-e_n\}\\
&\cdots\\
\Delta_{n+1}^+ &\Longleftrightarrow \Pi_{n+1}=\{e_1-e_2,\ldots,e_{n-1}-e_n,e_n-e_{n+1}\}
\end{aligned}$$

と表される。

ここで K のルート系と $U(n)$ のルート系を以下のようにして同一視する。$\mathfrak{u}(n)$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}=\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{R}E_{ii}^{\vee}$ で表される（$E_{ij}^{\vee}=(\delta_{ki}\delta_{lj})_{kl}\in\mathfrak{u}(n)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$）。$f_i\in\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ を $f_i(E_{jj}^{\vee})=\delta_{ij}$ で定めると、K と $U(n)$ の同一視で f_i に対応する $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ の元は

$$e_i'=e_i-\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}e_j$$

となる。これを用いると

$$\Xi_k=\left\{\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\Lambda_ie_i';\ \Lambda_1>\cdots>\Lambda_{k-1}>0>\Lambda_k>\cdots>\Lambda_n\ (\Lambda_i\in\mathbb{Z})\right\}$$

とおいたとき、$\bigcup_{k=1}^{n+1}\Xi_k$ は Harish-Chandra パラメーターの集合となり、対応する Blattner パラメーターは

$$\Xi_k=\left\{\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i'=\sum_{i=1}^{k-1}(\Lambda_i+k+i-n-1)e_i'+\sum_{i=k}^{n}(\Lambda_i+k+i-n-2)e_i'\right.$$
$$;\ \lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_{k-1}\ge 2k-n-1,\ 2k-n-3\ge\lambda_k\ge\cdots\ge\lambda_n\ (\lambda_i\in\mathbb{Z})\}$$

と書ける。

一方、$\mathfrak{p}=\left\{\sum_{i=1}^{n}(z_iE_{i,n+1}+\bar{z}_iE_{n+1,i});\ \ z_i\in\mathbb{C}\right\}$ であるから、

$$(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})\simeq(\tau_{2e_1'+e_2'+\cdots+e_n'},V_{2e_1'+e_2'+\cdots+e_n'})\bigoplus(\tau_{-e_1'-\cdots-e_{n-1}'-2e_n'},V_{-e_1'-\cdots-e_{n-1}'-2e_n'})$$

が成り立つ。よって K の highest weight $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i'$ に対して

$$(\tau_\lambda,V_\lambda)\otimes(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})\simeq\bigoplus_{i=1}^{n}(\tau_k^+,V_k^+)\bigoplus\bigoplus_{i=1}^{n}(\tau_k^-,V_k^-)$$

と既約分解される。但し、

$$(\tau_k^\pm,V_k^\pm)=(\tau_{\lambda\pm e_1\pm\cdots\pm e_{k-1}\pm 2e_k\pm\cdots\pm e_n},V_{\lambda\pm e_1\pm\cdots\pm e_{k-1}\pm 2e_k\pm\cdots\pm e_n})$$

とした。

一方、$\frac{E_{i,n+1}+E_{n+1,i}}{2\sqrt{n+1}},\sqrt{-1}\frac{E_{i,n+1}-E_{n+1,i}}{2\sqrt{n+1}}$ $(1\le i\le n)$ を $\mathfrak{p}$ の正規直交基底として採用することができるので、これを $\nabla_{\tau_\lambda,\eta}$ の計算に用いる。

$H=E_{n,n+1}+E_{n+1,n}$ とすると、$\mathbb{R}H=\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間で、$f\in\mathfrak{a}^*$ を $f(H)=1$ で定義すると、$\Sigma(\mathfrak{a},\mathfrak{g})=\{\pm f,\pm 2f\}$ であるので、$\Sigma^+(\mathfrak{a},\mathfrak{g})=\{f,2f\}$ ととると、$\mathfrak{g}_f$ の基底として

$$X_i=E_{in}-E_{i,n+1}-E_{ni}-E_{n+1,i}\quad(1\le i\le n-1)$$
$$Y_i=\sqrt{-1}(E_{in}-E_{i,n+1}+E_{ni}+E_{n+1,i})\ (1\le i\le n-1)$$

が、また $\mathfrak{g}_{2f}$ の基底として

$$W=\sqrt{-1}(E_{nn}-E_{n,n+1}+E_{n+1,n}-E_{n+1,n+1})$$

が、それぞれとれる。

ここで「計算しやすい」$\eta\in\hat{N}$ として

$$(**)\quad \eta\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_iX_i+y_iY_i)+wW\right)\right)=e^{\sqrt{-1}x_{n-1}\xi}\quad(x_i,y_i,w\in\mathbb{R},\ \ \xi\in\mathbb{R}_{>0})$$

となるものをとり、A の座標として

$$\mathbb{R}_{>0}\ni a\mapsto\exp((\log a)H)\in A$$

を採用する。

$K\simeq U(n)$ だから highest weight が $\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_ie_i'$ $(\mu_i\in\mathbb{Z},\ \ \mu_i\ge\mu_{i+1})$ である K の既約有限次元表現 (τ_μ,V_μ) の基底として Gel'fand-Zetlin 基底 $GZ(\mu)=\{Q\}$ を用いる。

ここで $\mathfrak{u}(n)$ の、よって $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の Gel'fand-Zetlin 基底の説明をしておく。

highest weight が $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e'_i$ である K の既約有限次元表現 V_μ に対して、

$$
Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{1,n} \ \ q_{2,n} \ \ \cdots\cdots \ \ q_{n-1,n} \ \ q_{n,n} \\ q_{1,n-1} \ \ q_{2,n-1} \cdots \ \ q_{n-1,n-1} \\ \cdots\cdots \\ \cdots \\ q_{1,2} \ \ q_{2,2} \\ q_{1,1} \end{pmatrix}
$$

という形の図形で

$$
\begin{cases} q_{i,j} - q_{i,j-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ q_{i,j-1} - q_{i+1,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ q_{i,n} = \mu_i \ \ (1 \leq i \leq n) \end{cases}
$$

をみたすものの集合を $GZ(\mu)$ で表すと、これは V_μ の基底をなす。$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の元 E_{ij} の作用は、

$$
E_{j,j+1} Q = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(Q) \sigma_{i,j} Q
$$

$$
E_{j+1,j} Q = \sum_{i=1}^{j} b_{i,j}(Q) \tau_{i,j} Q
$$

$$
E_{jj} Q = \left(\sum_{i=1}^{j} q_{i,j} - \sum_{i=1}^{j-1} q_{i,j-1} \right) Q
$$

で与えられる。但し

$$
a_{i,j}(Q) = \sqrt{\left| \frac{\prod_{k=1}^{j+1} (q_{k,j+1} - q_{i,j} - k + i) \prod_{k=1}^{j-1} (q_{k,j-1} - q_{i,j} - k + i - 1)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{j} (q_{k,j} - q_{i,j} - k + i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{j} (q_{k,j} - q_{i,j} - k + i - 1)} \right|}
$$

$$
b_{i,j}(Q) = \sqrt{\left| \frac{\prod_{k=1}^{j+1} (q_{k,j+1} - q_{i,j} - k + i + 1) \prod_{k=1}^{j-1} (q_{k,j-1} - q_{i,j} - k + i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{j} (q_{k,j} - q_{i,j} - k + i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{j} (q_{k,j} - q_{i,j} - k + i + 1)} \right|}
$$

σ_{ij} : Q の $q_{i,j}$ を $q_{i,j} + 1$ にしたもの

τ_{ij} : Q の $q_{i,j}$ を $q_{i,j} - 1$ にしたもの

とした。一般の $E_{k,l}$ の作用は、$E_{k,l}$ が $E_{i,i+1}$ または $E_{i+1,i}$ たちの括弧積で表されることを使えば計算することができる。

これを用いて $\phi \in C^{\infty}_{\tau_\lambda}(K\backslash G/N;\eta)$ を

$$\phi(g) = \sum_{Q\in GZ(\lambda)} c(Q;g)Q$$

と表す。$Sp(1,1)$ のときと同様にして $\phi(g) \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ を決定するには $\phi|_A \in \mathrm{Ker}R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta})$ を求めれば十分である。

$V_\lambda \otimes \mathrm{Ad}$ から $V_k^{\pm}$ への射影作用素を $P_k^{\pm}$ で表し、V_λ を $U(n+1)$ の、highest weight が $\tilde{\lambda} = (\lambda_1+1)e_1 + \sum_{i=2}^{n+1}\lambda_i e_{i-1}$ (resp. $\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i + (\lambda_n - 1)e_{n+1}$) である既約有限次元表現に

$$GZ(\lambda) \ni Q \mapsto \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1+1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ & Q & & \end{pmatrix} \in GZ(\tilde{\lambda})$$

$$\left(\text{resp. } GZ(\lambda) \ni Q \mapsto \hat{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \lambda_n - 1 \\ & Q & & \end{pmatrix} \in GZ(\hat{\lambda})\right)$$

となるように埋め込んでおく。

このとき参考文献 [Kr] の方法を用いて計算をすると、

命題

$P_k^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(a)) = 0 \iff$

$$\sum_{Q\in GZ(\lambda)} a_{k,n}(\tilde{Q})\left\{\left(a\frac{d}{da} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i - 2\lambda_k - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i,n-1} + 2k - 2\right)c(Q;a)\sigma_{kn}Q - \frac{\xi}{a}c(Q;a)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_{j,n-1}(\sigma_{kn}Q)}{\lambda_k - q_{j,n-1} - k + j + 1}\sigma_{j,n-1}\sigma_{kn}Q\right\} = 0$$

$P_k^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(a)) = 0 \iff$

$$\sum_{Q\in GZ(\lambda)} b_{k,n}(\hat{Q})\left\{\left(a\frac{d}{da} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i + 2\lambda_k + \sum_{i=1}^{n-1} q_{i,n-1} - 2k + 2n\right)c(Q;a)\tau_{kn}Q + \frac{\xi}{a}c(Q;a)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_{j,n-1}(\tau_{kn}Q)}{\lambda_k - q_{j,n-1} - k + j}\tau_{j,n-1}\tau_{kn}Q\right\} = 0$$

となる。

すると $\lambda \in \Xi_k$ のとき、$\mathcal{D}_{\lambda,\eta}\phi(g) = 0$ は

$$\begin{aligned} P_1^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)) &= \cdots = P_{k-1}^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)) \\ &= P_k^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)) = \cdots = P_n^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)) = 0 \end{aligned}$$

と同値であるから、この命題を使って方程式系をたてて、それを解くと、以下のような結果を得る。

定理 3

(1) N の任意の非退化指標 ζ に対し、$\Lambda \in \Xi_1$ または $\Lambda \in \Xi_{n+1}$ のとき、$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N;\zeta)) = \{0\}$ 。

(2) N の任意の非退化指標 ζ に対し、$\Lambda \in \Xi_k$ $(k = 2,3,\ldots,n)$ のとき、

$$\dim\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N;\zeta)) = 2 \sum_{\substack{\lambda_1\geq\mu_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{k-2}\geq\mu_{k-2}\geq\lambda_{k-1} \\ \lambda_k\geq\mu_{k-1}\geq\lambda_{k+1}\geq\cdots\geq\lambda_{n-1}\geq\mu_{n-2}\geq\lambda_n}} \dim V_{n-2}(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})$$

が成り立つ。但し $V_{n-2}(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})$ は highest weight が $(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})$ である $U(n-2)$ の既約有限次元表現である。

(3) N の指標 η を (**) のように定めると、$\Lambda \in \Xi_k$ $(2 \leq k \leq n)$ のとき、$\phi \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ は

$$\begin{aligned} q_{1,n-1} &= q_{1,n-2},\ldots,q_{k-2,n-1} = q_{k-2,n-2} \\ q_{k-1,n-1} &= \lambda_{k-1} \\ q_{k-1,n-2} &= q_{k,n-1},\ldots,q_{n-2,n-2} = q_{n-1,n-1} \end{aligned}$$

となる Q に対する $c(Q;a)$ $(a \in A)$ を決めればすべて決定される。

(4) (3) の条件をみたす Q に対し、$c(Q;a)$ は

$$c(Q;a) = a^{-\sum_{q=1}^{k-1}\lambda_q + \sum_{q=k}^{n}\lambda_q + \sum_{q=1}^{k-2} q_{q,n-1} - \sum_{q=k}^{n-1} q_{q,n-1} - n + \frac{1}{2}} \times \left\{ c_1(Q) W_{0,\lambda_{k-1}+n-2k+2}\left(\frac{2\xi}{a}\right) + c_2(Q) M_{0,\lambda_{k-1}+n-2k+2}\left(\frac{2\xi}{a}\right) \right\}$$

と表される。但し $c_1(Q), c_2(Q)$ は任意定数、$W_{\alpha,\beta}(t), M_{\alpha,\beta}(t)$ は Whittaker の合流型超幾何関数である。

証明のスケッチ

まず (3) の $q_{i,j}$ の条件の必要性と (1) は以下のようにして分かる。

前の命題の式を注意深く見てやれば、$l(\leq n-1)$ に対して $P_l^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(a)) = 0$ なら、$q_{l,n-1} = \lambda_l$ となる Q に対して $c(Q;a) = 0$ となることが分かる。これより再び命題の式を繰り返して用いることにより、$q_{l-1,n-2} > \lambda_l$ となる Q に対して $c(Q;a) = 0$ であることが分かる。同様にして、$l(\geq 2)$ に対して $P_l^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(a)) = 0$ なら、$q_{l-1,n-2} < \lambda_l$ となる Q に対して $c(Q;a) = 0$ であることが分かる。よって $\Lambda \in \Xi_k$ のとき、

$$\begin{aligned} P_1^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)) &= \cdots = P_{k-1}^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)) \\ &= P_k^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)) = \cdots = P_n^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)) = 0 \end{aligned}$$

であるから、まず (1) が示された。更に命題の式には、Q の $q_{k,n-1}$ についての差分があるので、これを使えば (3) の必要性が分かる。

(4) は前の命題の式で、$q_{i,j}$ が (3) の条件を満たすような Q に対する $\sigma_{kn}Q$ と $\tau_{kn}Q$ の係数より得られる方程式系を解くことによって得られる。

(3) の十分性と (2) は松本久義氏による Whittaker model の次元と Bernstein degree の関係式（参考文献 [M] 参照）と、Chang の計算による $\mathbb{R}$-rank 1 のリー群の離散系列表現の Berinstein degree の公式（ [C] 参照）を使えば得られる。

References

[C] Chang, J-T., *Characteritic cycles of discrete series for $\mathbb{R}$-rank one groups*, Transactions of the American mathematical society **341** (1994), 603-622.

[E] Erdélyi,A et al., *Higher Transcendental Functions*, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.

[G-Z] Gel'fand,I.M. and Zetlin,M.L., *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, Dokul. Akad. Nauk SSSR **71** (1950), 825-828.

[Kr] Kraljević, H., *Representations of the universal covering group of the group* $SU(n,1)$.

[K-O] Koseki,H. and Oda,T., *Whittaker functions for the large discrete series representations of* $SU(2,1)$ *and related zeta integrals, preprint.*

[M] Matumoto,H., *Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators*, Acta mathematica **161** (1988), 183-241.

[O1] Oda,T., *An explicit integral representation of Whittaker functions on* $Sp(2,\mathbb{R})$ *for the large discrete series representations* (to appear in Tohoku J. Math).

[O2] ———, *An explicit integral representation of Whittaker functions for the representations of the discrete series —The case of* $SU(2,2)$*— , preprint.*

[Y1] Yamashita,H., *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I —General theory and the case of* $SU(2,2)$*—*, Japan J. Math. **16** (1990), 31-95.

[Y2] ———, *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, II —Generalized Whittaker models for* $SU(2,2)$*—*, J. Math. Kyoto Univ. **31-2** (1991), 543-571.